חלוקת ריבוע לריבועים קטנים

משימה

1. האם ניתן לחתוך ריבוע ל-4 ריבועים קטנים?
2. האם ניתן לחתוך ריבוע ל-9 ריבועים קטנים?
3. האם ניתן לחתוך ריבוע ל-34 ריבועים קטנים?

מדרגה

- הציעו דרכים לחלוקה של ריבוע ל- 7 ריבועים קטנים? ל- 10 ריבועים קטנים?
- הציגו את החלוקות בעזרת סרטוט.
- כמה ריבועים נוספו בכל חלוקה?
- האם ניתן להמשיך בחלוקות הנ"ל?
- הציעו הכללה למספרי הריבועים שהתקבלו.

הנחיות למורה

כיתה מומלצת

- כיתה ז', שליש ראשון.

סוג המשימה

- בעיית חקר.
- ריבוי דרכי פתרון.

הידע הדרוש

- הגדרה ותכונות של ריבוע.
- חשבון של חזקות ברמה בסיסית.

מה נלמד

- חוקיות.
- הכללה של תופעות מספריות.

הדגשים ומטרות

- ההשפעה של כל חלוקה או מחיקה על מספר הריבועים.
- התאמת ביטויים אלגבריים לחלוקות מוצעות.
- חלוקות שונות מתאימות לביטויים זהים.
- חלוקה אחת מתאימה לביטויים שונים.

מערך דידקטי מומלץ

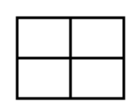
- הצגת המשימה לתלמידים ואופן העבודה.
- עבודה של התלמידים בקבוצות על סעיפים א׳ וב׳.
- דיון כיתתי: חשוב להציג גם את התרשים שמוביל לפתרון.
- עבודה בקבוצות על סעיף ג׳.
- דיון כיתתי מסכם בו יעלו התלמידים את הצעותיהם.
- הצעה להרחבה של האפשרויות– מחיקה של חלוקות.

הצעות לפתרונות:

הערה מקדימה: התלמידים שמשתתפים בפעילות לא בהכרח מכירים את מושג המשתנה. לכן כדאי להסביר להם את הפתרון באופן מילולי וללא שימוש במשתנה-n.

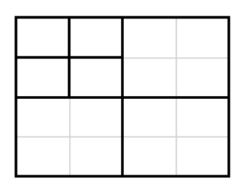
יוצאים מריבוע אחד.

את הריבוע הזה ניתן לחלק ל- 4 ריבועים באופן הבא:



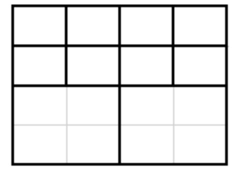
כל אחד מהריבועים הקטנים ניתן לחלוקה לארבעה ריבועים באופן הבא:

כך נוספים 3 ריבועים חדשים בכל חלוקה:



מתקבלים 7 ריבועים

© ר. לייקין וצוות מפת"ח מתמטי
אוניברסיטת חיפה



מתקבלים 10 ריבועים.

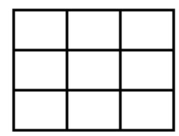
אם נמשיך בחלוקות הללו נקבל את מספרי הריבועים הבאים:

$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \ldots\ldots..$

מספר הריבועים שכל חלוקה יוצרת מהווים סדרה חשבונית עם איבר כללי $3n-2$

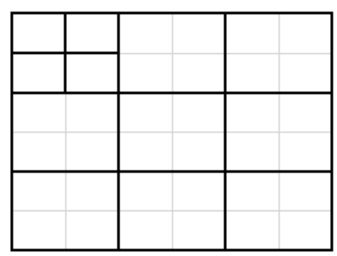
או $3n+1$.

באופן דומה ניתן



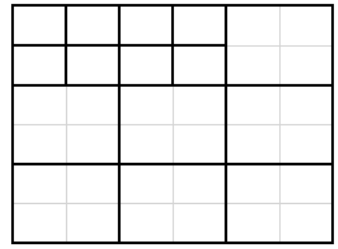
כל אחד מהריבועים הקטנים, שוב ניתן לחלוקה לארבעה ריבועים, באופן הבא:

כך נוספים 3 ריבועים חדשים בכל חלוקה:



מתקבלים 12 ריבועים

© ר. לייקין וצוות מפת"ח מתמטי
אוניברסיטת חיפה



מתקבלים 15 ריבועים

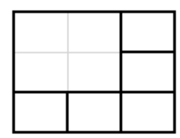
אם נמשיך בחלוקות הללו נקבל את מספרי הריבועים הבאים:

$9, 12, 15, \ldots\ldots$

מספר הריבועים שכל חלוקה יוצרת (חוץ מהריבוע ה- 1) מהווים סדרה חשבונית עם איבר כללי $3n$. ($n \geq 3$)

שוב יוצאים מריבוע שמחולק ל- 9 ריבועים קטנים.

נמחק חלוקה אחת (2x2) מריבוע שמורכב מ- 9 ריבועים קטנים (בדומה לחלוקה שעשינו קודם)



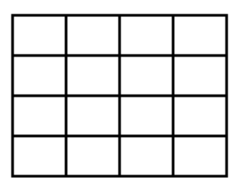
מתקבלים 6 ריבועים

ואם נשלב את שני המהלכים האחרונים שמתייחסים לריבוע המחולק ל- 9 ריבועים קטנים, מתקבלים המספרים:

$6, 9, 12, 15, 18, \ldots\ldots$

כלומר האיבר הכללי נשמר והוא $3n$. ($n \geq 2$)

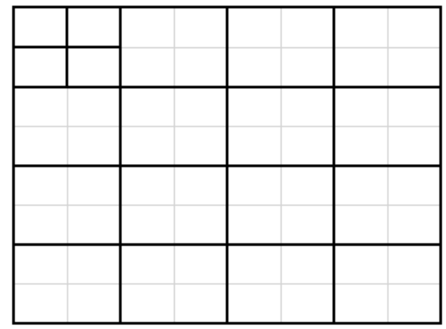
נצא שוב מריבוע אחד. הפעם נחלק אותו ל- 16 ריבועים קטנים.



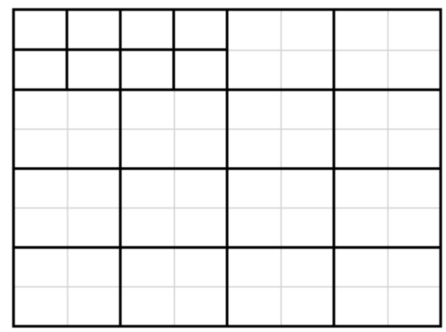
כל אחד מהריבועים הקטנים שוב ניתן לחלוקה לארבעה ריבועים באופן הבא:

© ר. לייקין וצוות מפת"ח מתמטי
אוניברסיטת חיפה

כך נוספים 3 ריבועים חדשים בכל חלוקה:



מתקבלים 19 ריבועים



מתקבלים 22 ריבועים

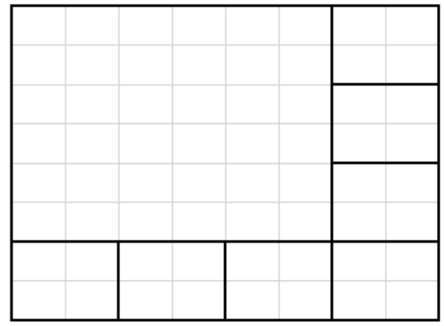
אם נמשיך בחלוקות הללו נקבל את מספרי הריבועים הבאים:

$16, 19, 22, \ldots\ldots$

חלוקות למספרי הריבועים הללו התקבלו כבר קודם.

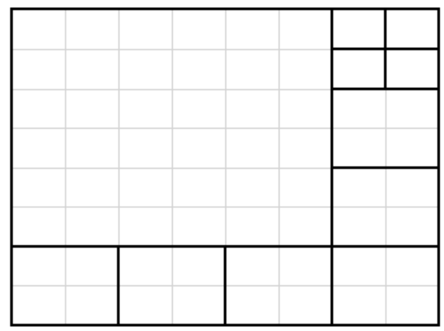
אבל, אם נמחק את החלוקה של 3x3 באופן הבא:

© ר. לייקין וצוות מפת"ח מתמטי
אוניברסיטת חיפה



מתקבלים 8 ריבועים

ונמשיך בחלוקות של הריבועים הקטנים:



מתקבלים 11 ריבועים

אם נמשיך נקבל את החלוקות הבאות:

$$8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, \ldots\ldots..$$

מספר הריבועים שכל חלוקה יוצרת (חוץ מהריבוע ה- 1) מהווים סדרה חשבונית עם איבר כללי $3n+2$. $(n \geq 2)$

לסיכום: בעזרת שילוב של חלוקות ומחיקות מתקבלים כל המספרים הבאים:

$$4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots..$$

לא ניתן להגיע למספרים: 2, 3, 5.

– –

אז איך מתקבלים 34 ריבועים?

אם יוצאים מריבוע שחולק ל- 4 ריבועים קטנים – האיבר הכללי שהתקבל הוא:

$3n-2$, והצבה של 12 תביא אותנו ל- 34.

© ר. לייקין וצוות מפת"ח מתמטי
אוניברסיטת חיפה

לאור זאת,

האם ניתן לחלק ריבוע ל- 200 ריבועים קטנים?

הציעו דרכים לחלוקה.

(שאלה זו או דומה לה ניתנת להצגה גם לתלמידים, על פי שיקול הדעת של המורה).

© ר. לייקין וצוות מפת"ח מתמטי
אוניברסיטת חיפה