



מספר קטעים חלק א'

משימה

שתי נקודות מגדירות קטע אחד:



שלוש נקודות על ישר אחד מגדירות שלושה קטעים:



כמה קטעים יוגדרו כשמספר הנקודות (על ישר אחד) משתנה? השלימו את הטבלה הבאה:

n	20	10	6	5	4	3	2	1	מספר נקודות
						3	1	0	מספר קטעים

הסבירו את תשובתכם בדרכים שונות.

מדרגה ראשונה: תוכלו להיעזר ביישומון המצורף.

מדרגה שנייה: תוכלו להיעזר ביישומון המצורף.

מדרגה שלישית: (דרכי פתרון אפשריות)

דרך 1:

- הזיזו את הנקודות על הישר, כך שהמרחקים בין כל שתי נקודות שכנות יהיו שווים זה לזה (למשל, כל מרחק יהיה שווה ל-1 ס"מ). האם זה משפיע על התשובה?
- מהו מספר הקטעים, שאורך כל אחד מהם 1 ס"מ, מוגדרים על ידי n נקודות, במקרה שהנקודות מסודרות כאמור במשימה? (ניתן להתייחס למקרה פרטי, למשל $n = 6$)
- כמה קטעים, שאורך כל אחד מהם 2 ס"מ, מוגדרים על ידי n נקודות כאלה?
- מהו אורך הקטע הגדול ביותר?
- כמה קטעים מתקבלים על הישר בסה"כ?

דרך 2:

- סמנו על הישר שתי נקודות בלבד. כמה קטעים מתקבלים?
- הוסיפו נקודה שלישית. כמה קטעים "חדשים" נוספים? מי הם הקטעים?
- כמה קטעים חדשים מתקבלים אחרי סימון הנקודה הרביעית, החמישית... העשירית?
- כמה קטעים חדשים נוספים אחרי סימון הנקודה ה- n -ית?
- כמה קטעים בסה"כ, מתקבלים על הישר, אחרי סימון n נקודות?

דרך 3:

- העבירו חץ, מכל אחת מ- n הנקודות המסומנות על הישר, לכל שאר נקודות. כמה חיצים מתקבלים בסה"כ?
- כמה חיצים מתאימים לכל קטע?
- מהו הקשר בין מספר החיצים לבין מספר הקטעים?
- מהו המספר הכולל של הקטעים?

הנחיות למורה

כיתה מומלצת

- כיתה ז', שליש ראשון.

סוג המשימה

- משימת חקר.
- מדוגמאות להכללה.
- דרכים שונות שמובילות לביטויים אלגבריים שווים.

הידע הדרוש

- בניית ביטוי אלגברי (ללא פישוט ביטויים).

מה נלמד

- מעבר מביטוי חשבוני בעל ערך מספרי לביטוי אלגברי.
- הבנת המשמעות של ביטויים אלגבריים שווים.

הדגשים ומטרות

- לפתח את היכולת של התלמיד לקשר בין חשיבה על דרך פתרון מסוימת לבין תרגיל חשבוני או ביטוי אלגברי.
- הכרות וחיזוק של גישה עצמאית לחקירה, להסקת מסקנות, להכללות.

אפיון דירוג

- הדירוג מאפשר חקירה עצמית לתלמידים שאינם בעלי נסיון רב בעיסוק עם בעיות חקר.
- הדירוג מאפשר לפתור את השאלה בדרכים שונות.

מערך דידקטי מומלץ

- פתיחת השיעור: הצגת המשימה והנדרש בה.
- עבודה בקבוצות.
- דיון במליאה.

הצעות לפתרונות:

פתרון לפי דרך 1:

ללא הגבלת הכלליות נניח שהמרחק, בין כל זוג נקודות שכנות, הוא 1 (הנחה זאת אינה משפיעה על מספר הקטעים).

במקרה זה על הישר יש

$n - 1$ קטעים באורך 1;

$n - 2$ קטעים באורך 2: הקצה השמאלי של קטע שאורכו 2: יכול להיות כל נקודה נתונה מלבד שתי הנקודות הימניות הקיצוניות; וכך הלאה, ...

קיימים 2 קטעים שאורכם $(n - 2)$; ולבסוף יש רק קטע אחד שאורכו $(n - 1)$.

לכן, סה"כ יש $1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$ קטעים.

פתרון לפי דרך 2:

מסמנים את הנקודות על הישר באופן שיטתי אחת אחרי השנייה.

אחרי סימון שתי הנקודות הראשונות מקבלים קטע אחד.

הנקודה השלישית מגדירה על הישר 2 קטעים נוספים (בינה לבין שתי הנקודות שסומנו קודם).

הנקודה הרביעית מגדירה 3 קטעים חדשים וכך הלאה, ...

הנקודה ה- n מוסיפה $(n - 1)$ קטעים חדשים (בינה לבין כל אחת מ- $(n - 1)$ הנקודות שסומנו קודם).

לכן, סה"כ מספר הקטעים הוא: $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$.

פתרון לפי דרך 3:

מעבירים מכל נקודה חצים לכל שאר $(n - 1)$ הנקודות. כך מקבלים $n(n - 1)$ חצים.

יש לשים לב שלכל קטע מתאימים 2 חצים בכיוונים נגדיים, לכן, מספר הקטעים שווה למחצית מספר

החצים. כלומר, מספר הקטעים הוא $\frac{(n-1)n}{2}$.